Chapitre XIII – Les nombres complexes (Maths expertes)

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

1. L'ensemble $\mathbb{C}$

À RETENIR

L'ensemble $\mathbb{C}$

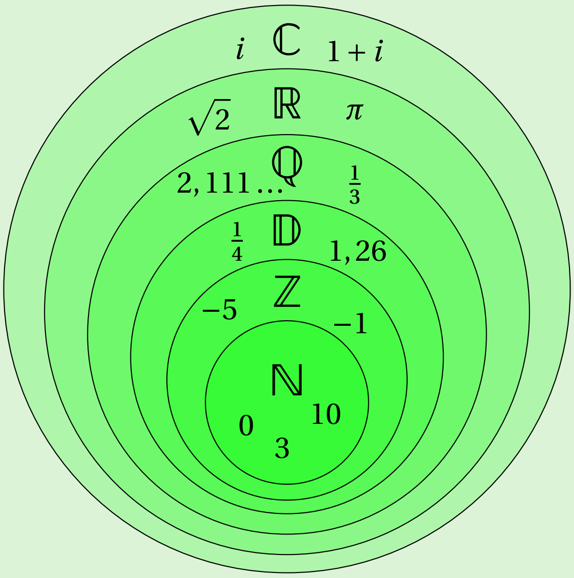
Il existe un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$ qui contient l'ensemble $\mathbb{R}$ ainsi qu'un nombre $i \in \mathbb{C}$ vérifiant $i^2 = -1$.

Cet ensemble est appelé **ensemble des nombres complexes** et obéit aux "mêmes" règles de calcul que l'ensemble $\mathbb{R}$.

À LIRE

Schéma

Il peut être dur de se représenter l'ensemble des nombres complexes, voici un schéma représentant les ensembles de nombres déjà connus :



Comme on peut le voir ici, l'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ mais également des nombres qui ne sont pas réels (i, $1+i$, etc.).

2. Forme algébrique d'un nombre complexe

À RETENIR

Forme algébrique

Tout **nombre complexe** z peut s'écrire $z = x + iy$ où x et y sont deux réels. Cette écriture est appelée **forme algébrique** de z. On dit que :

— x est la **partie réelle** de z (notée $\mathrm{Re}(z)$).

— y est la **partie imaginaire** de z (notée $\mathrm{Im}(z)$).

À LIRE

Le nombre z est dit **réel** si $y = 0$ et il est dit **imaginaire pur** si $x = 0$.

3. Égalité entre nombres complexes

À RETENIR

Lien entre égalité et parties réelle et imaginaire

Deux nombres complexes z et z' sont **égaux** si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$.

Ainsi, pour que deux nombres complexes soient égaux, leur partie réelle et leur partie imaginaire doivent toutes deux être égales.

À LIRE

Attention !

Il n'y pas de relation d'ordre dans l'ensemble $\mathbb{C}$. On ne pourra donc pas avoir de relation du type "$z \leq z'$".

4. Conjugué

À RETENIR

Définition

Tout nombre complexe $z = x + iy$ admet un nombre complexe **conjugué** noté $\bar{z}$. Ce conjugué est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.

On donne également quelques formules permettant de calculer plus facilement des conjugués de nombres complexes.

À RETENIR

Relations

Soient z et z' deux nombres complexes.

— $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
— $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ où $z' \neq 0$
— $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ où $n \in \mathbb{N}$
— $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

Enfin, on a plusieurs propriétés intéressantes que l'on peut dégager.

À RETENIR

Propriétés

Soit z un nombre complexe.

— $\bar{\bar{z}} = z$
— $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
— $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
— z est un réel si et seulement si $z = \bar{z}$
— z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$

5. Module

À RETENIR

Définition

On appelle **module** d'un nombre complexe $z = x + iy$ (noté $|z|$) le réel $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Le module possède des propriétés intéressantes (à la manière de la valeur absolue pour les réels).

À RETENIR

Formules

Soient z et z' deux nombres complexes.

— $|z| \geq 0$
— $|z| = 0 \iff z = 0$
— $|\alpha z| = \sqrt{\alpha^2}|z|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (en particulier, $|-z| = |z|$)
— $z\bar{z} = |z|^2$
— $|z| = |\bar{z}|$
— $|zz'| = |z| \times |z'|$
— $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ où $z' \neq 0$
— $|z^n| = |z|^n$ où $n \in \mathbb{N}$

À LIRE

Retrouver les formules

Ces propriétés peuvent sembler compliquées mais heureusement il est possible de les retrouver par le calcul. Par exemple, pour la quatrième propriété, en posant $z = x + iy$ (et donc $\bar{z} = x - iy$) :

$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2$.

II - Polynômes dans $\mathbb{C}$

1. Généralités sur les polynômes

À RETENIR

Définition

Soit n un entier. On dit que P est un **polynôme de degré** n si P est une expression formelle de la forme : $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$.

En classe de Terminale, on peut remplacer "expression formelle" par "fonction" (un polynôme de degré n sera donc la même chose qu'une **fonction polynômiale de degré** n). Dans ce chapitre, ce seront des fonctions à valeurs complexes.

À LIRE

Il peut être intéressant pour vous de faire le lien avec les fonctions polynômiales du second degré vues en Première.

À RETENIR

Racine d'un polynôme

On dit qu'un nombre complexe a est une racine d'un polynôme P si on a $P(a) = 0$.

On donne enfin la **formule du binôme de Newton**, qui peut s'avérer utile pour développer certaines expressions.

À RETENIR

Formule du binôme de Newton

Soient a et b deux nombres complexes. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

DÉMONSTRATION

Formule du binôme de Newton

Nous allons prouver cette propriété en utilisant le dénombrement, mais il est tout à fait possible de le faire par récurrence (c'est d'ailleurs un très bon exercice!)

Ainsi, on a $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\times(a+b)\times\cdots\times(a+b)}_{n \text{ fois}}$.

En développant cette expression on peut obtenir une somme de termes de la forme $a^k b^j$ où :

- k représente le nombre de fois où l'on a choisi a en développant.
- j représente le nombre de fois où l'on a choisi b en développant.

Ainsi, forcément, $i = n-k$ (car si on ne choisit pas a, alors on choisit b; choisir k fois a revient donc à choisir $n-k$ fois b).

De plus, il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir k fois a parmi les n expressions $(a+b)$, alors l'expression $a^k b^{n-k}$ apparaît $\binom{n}{k}$ lors du développement. Notre somme de termes devient donc :

$$(a+b)^n = \underbrace{(a^0 b^{n-0} + \cdots + a^0 b^{n-0})}_{\binom{n}{0}\text{ termes}} + \cdots + \underbrace{(a^k b^{n-k} + \cdots + a^k b^{n-k})}_{\binom{n}{k}\text{ termes}} + \cdots + \underbrace{(a^n b^{n-n} + \cdots + a^n b^{n-n})}_{\binom{n}{n}\text{ termes}}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

À LIRE

Si $n=2$, on retrouve $(a+b)^2 = \binom{0}{2}a^2b^0 + \binom{1}{2}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 = a^2+2ab+b^2$.

On admet de plus une propriété fondamentale de $\mathbb{C}$.

À RETENIR

Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme non-nul de degré n admet au plus n racines complexes.

2. Résolution d'une équation du second degré

Il est possible d'étendre la résolution d'une équation du second degré du type $ax^2+bx+c=0$ dans le cas ou le polynôme admet un discriminant est négatif. Nous allons voir ici une méthode de résolution.

À RETENIR

Résolution d'une équation du second degré

On considère l'équation $(E) : az^2+bz+c=0$ (où a, b et c sont trois réels et $a \neq 0$). On pose $\Delta = b^2-4ac$, et alors les solutions de (E) dépendent du signe de Δ :

- Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, (E) admet une solution réelle $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, (E) admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \bar{z}_1$.

À LIRE

Exemple

On souhaite résoudre l'équation $-2z^2+4z=10$ dans $\mathbb{C}$.

1re étape : On fait apparaître une équation du second degré : $-2z^2+4z-10=0$.

2e étape : On calcule le discriminant : $\Delta = b^2-4ac = 16-80 = -64$.

3e étape : On "transforme" le discriminant négatif : $\Delta = 64i^2 = (8i)^2$.

4e étape : On trouve les solutions :

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{-4-8i}{2\times -2} = 1+2i$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{-4+8i}{2\times -2} = 1-2i = \bar{z}_1$

À LIRE

Relation avec les racines d'un polynôme

Résoudre une équation du type $az^2+bz+c=0$ (où a, b et c sont trois réels et $a \neq 0$) revient à chercher les racines complexes du polynôme P défini pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $P(z) = az^2+bz+c$.

3. Factorisation par $z-a$

À RETENIR

Factorisation par une racine

Soit P un polynôme de degré n et soit a une racine de ce polynôme. Alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-a)Q(z)$.

À LIRE

Exemple

Factorisons le polynôme P défini pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$.

On remarque déjà que $P(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$. Donc 1 est racine de P, il existe donc un polynôme Q de degré 2 tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)Q(z)$.

Essayons maintenant de déterminer Q. Posons $Q(z) = az^2 + bz + c$ et déterminons les coefficients a, b et c.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)Q(z) = (z-1)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$.

Il suffit maintenant d'identifier les coefficients (dans la première expression de P) :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 \\ c - b = 1 \\ -c = -1 \end{cases}$$

En résolvant le système d'équations :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Finalement, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = z^2 + 1$, donc $P(z) = (z-1)(z^2+1)$.

Pour terminer la factorisation, il faut également factoriser Q. Pour cela on calcule son discriminant qui est donc $\Delta = -4$: on a deux racines complexes conjuguées qui sont $z_1 = -i$ et $z_2 = i$.

Finalement, comme Q est de degré 2 (et qu'on a trouvé deux racines), la factorisation est terminée : on a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = (z-i)(z+i)$ donc $P(z) = (z-1)(z-i)(z+i)$.

Une application possible de cette propriété est que tout polynôme P de la forme $P(z) = z^n - a^n$ se factorise en $P(z) = (z-a)Q(z)$ (où Q est un polynôme de degré $n-1$) car a est une racine de P et que P est un polynôme de degré n.

III - Géométrie avec les nombres complexes

1. Formes trigonométrique et exponentielle

Tout nombre complexe peut s'écrire sous trois formes la **forme algébrique**, la **forme trigonométrique** et la **forme exponentielle**.

À RETENIR

Forme trigonométrique

Pour obtenir la forme trigonométrique d'un nombre complexe $z = x + iy$, il faut tout d'abord obtenir son module. La **forme trigonométrique** de z est ensuite donnée par : $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Avec θ **l'argument** de z (noté $\arg(z)$) qui doit vérifier :

— $\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$
— $\sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$

Une fois la forme trigonométrique obtenue, on peut passer à la forme exponentielle.

À RETENIR

Forme exponentielle / Formule d'Euler

Soit z un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Alors $z = |z|e^{i\theta}$.

À LIRE

Exemple

On veut passer le nombre complexe $z = 1 + i$ sous forme exponentielle.

1re étape : On calcule le module : $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

2e étape : On factorise par le module : $z = \sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$.

3e étape : On calcule l'argument : $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On a donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ (car $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

4e étape : On passe à la forme exponentielle : $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

On peut étendre l'égalité entre nombres complexes donnée au début : deux nombres complexes sont égaux s'ils ont le **même module** et le **même argument (modulo 2π, nous détaillerons ce point-ci plus tard)**.

À LIRE

Formules de Première

Il est possible de retrouver les formules trigonométriques vues en Première à l'aide des nombres de complexes. La démonstration suivante n'est pas à apprendre mais peut être utile pour retrouver ces formules.

On a $e^{i\times(a+b)} = e^{i\times a} \times e^{i\times b}$.

En passant à la forme trigonométrique, cela donne : $\cos(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos(a) + i\sin(a)) \times (\cos(b) + i\sin(b))$.

Puis en développant : $\cos(a+b) + i\sin(a+b) = \cos(a)\cos(b) + i\cos(a)\sin(b) + i\cos(b)\sin(a) - \sin(a)\sin(b)$.

Il reste à travailler un petit peu l'expression : $\cos(a+b) + i\sin(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a))$.

Or deux nombres complexes sont égaux si et seulement si la partie réelle et la partie imaginaire de ces deux nombres sont égales, cela donne :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a) \end{cases}$$

Les formules vues en Première ont donc bien été retrouvées.

2. Propriétés de l'argument

À RETENIR

Propriétés

Soit z un nombre complexe.

— z est un réel si et seulement si $\arg(z) = k \times \pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

— z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = k \times \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Pour conclure cette partie, nous allons donner quelques formules permettant de calculer des arguments.

À RETENIR

Formules

Soient z et z' deux nombres complexes.

— $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \mod 2\pi$

— $\arg(-z) = -\arg(z) + \pi \mod 2\pi$

— $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \mod 2\pi$

— $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \mod 2\pi$

— $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \mod 2\pi$

— $\arg(z^n) = n \times \arg(z) \mod 2\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

À LIRE

Le " mod 2π" signifie simplement que l'on se place **modulo** 2π. Dans cette configuration, on a $-\pi = \pi \mod 2\pi$, mais aussi $-\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \mod 2\pi$, ou encore $\pi = 3\pi \mod 2\pi$.

3. Affixe et représentation

Dans tout ce qui suit, le plan sera muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

À RETENIR

Affixe d'un point

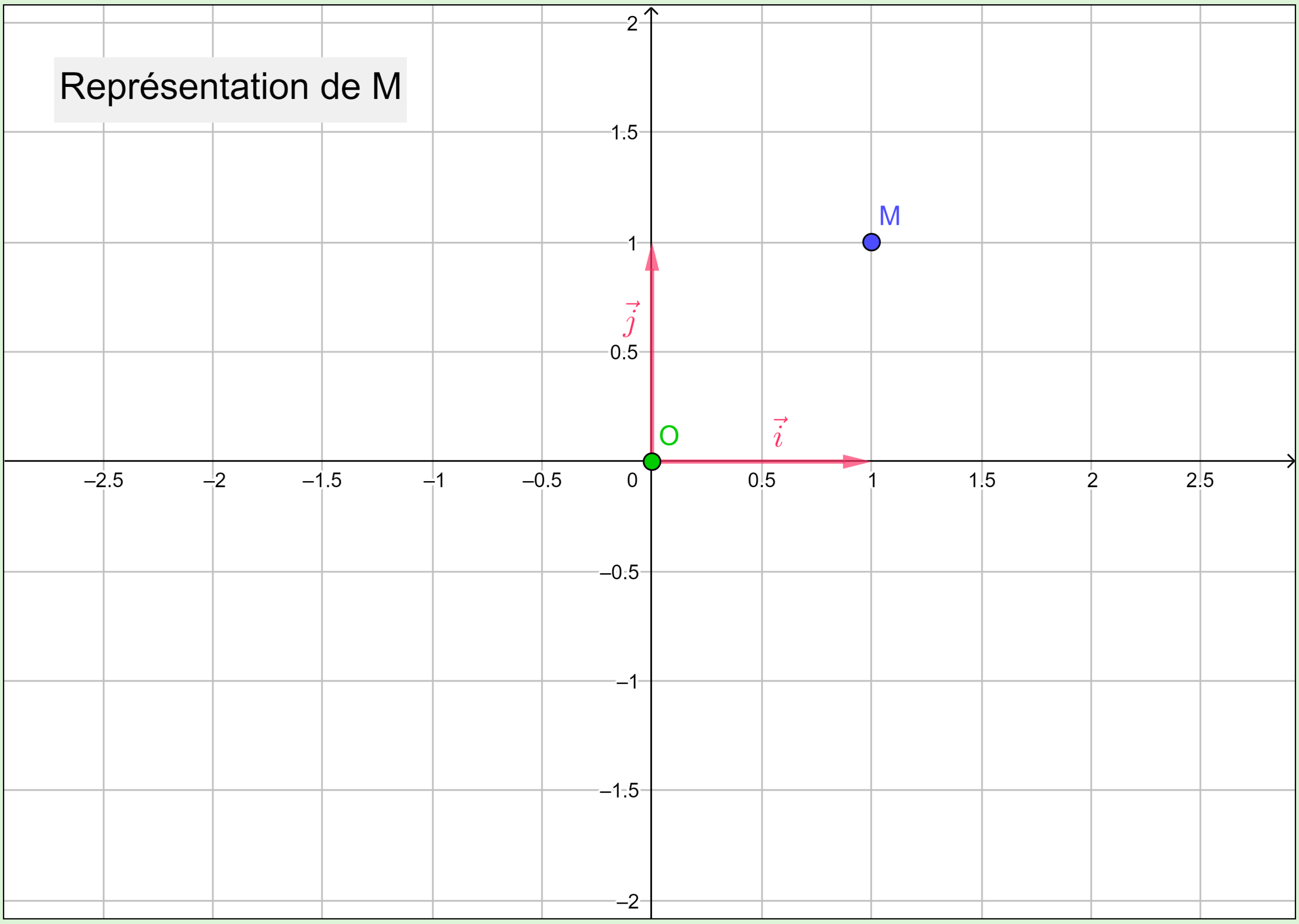
Un nombre complexe $z = x + iy$ peut être représenté dans le plan par un point M de coordonnées $(x; y)$. z est alors appelé **affixe** du point M (et réciproquement le point M est **l'image** de z).

Un nombre complexe $z' = |z'|e^{\theta}$ peut être représenté dans le plan par un point M' situé sur le cercle d'origine O et de rayon $|z'|$. Le point M' est alors situé à l'angle de θ radians sur ce cercle. Le module est donc une **distance** et l'argument est un **angle**.

À LIRE

Exemple

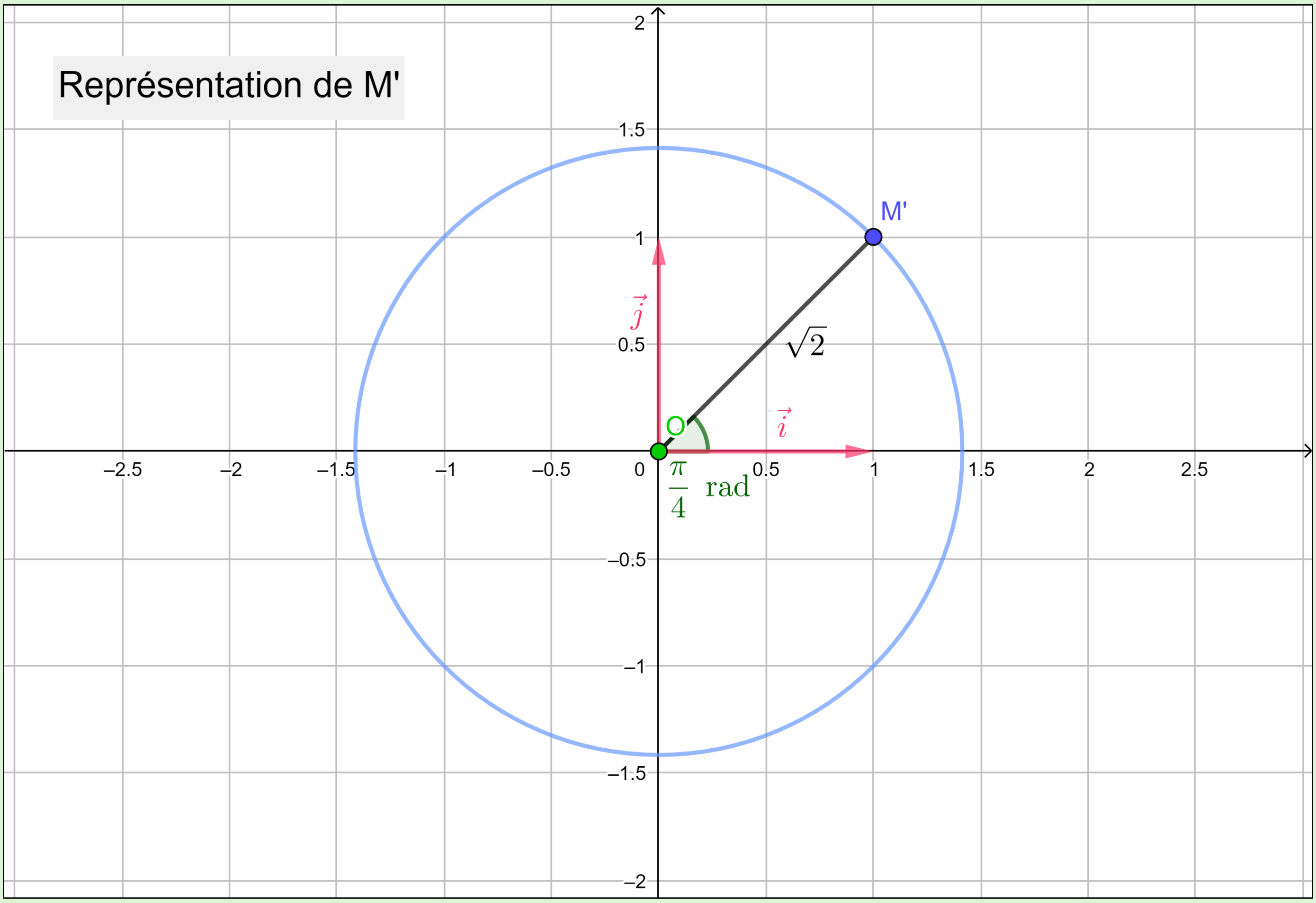
On souhaite représenter le point M d'affixe $z = 1 + i$ dans le plan. On a les coordonnées de M qui sont $x = 1$ et $y = 1$:



À LIRE

Exemple

On souhaite représenter le point M' d'affixe $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ dans le plan. On a le module de z' : $|z'| = \sqrt{2}$, et un argument de z' : $\theta = \frac{\pi}{4}$. On va donc tracer le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ ainsi qu'un segment passant par O et intersectant le cercle en faisant un angle de $\frac{\pi}{4}$ radians avec l'axe des abscisses. Leur intersection sera le point M' :



On voit à l'aide de ces deux représentations que $z = z'$ (où z est le nombre complexe de l'exemple précédent), comme cela a été démontré dans l'exemple de la première partie.

4. Lien Géométrie - Nombres complexes

Une propriété remarquable des nombres complexes est qu'il est possible de les utiliser pour faire de la géométrie ! Cela peut sembler surprenant, mais cela repose sur le fait que tout nombre complexe z s'écrit $x + iy$ (avec x la partie réelle de z et y sa partie imaginaire), et que, comme dit dans la partie précédente, on peut y associer le point de coordonnées $(x; y)$.
Voici, de manière plus formelle, quelques propriétés de géométrie reposant sur l'utilisation des nombres complexes. On rappelle que l'on se place dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

À RETENIR

Affixe d'un vecteur

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors on associe au vecteur $\overrightarrow{AB}$ son **affixe** qui est le complexe $z_B - z_A$.

À LIRE

Lien avec l'affixe d'un point

En fait, pour faire le lien avec la partie précédente, l'affixe d'un point A est tout simplement l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA}$.

À RETENIR

Propriétés

Soient A, B, C et D des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

- **La longueur** AB **est :** le module du complexe $z_B - z_A$ (i.e. $|z_B - z_A|$). Il s'agit également de la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- **Le milieu du segment** $[AB]$ **est :** le point M d'affixe $z_M = \frac{z_A+z_B}{2}$.
- **L'angle** $(\vec{i};\overrightarrow{AB})$ **est :** l'argument du complexe $z_B - z_A$ (i.e. $\arg(z_B - z_A)$, modulo 2π).
- **L'angle** $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$ **est :** l'argument du complexe $\left(\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}\right)$ (i.e. $\arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}\right)$, modulo 2π).

5. L'ensemble $\mathbb{U}$ et les racines n-ièmes de l'unité

À RETENIR

L'ensemble $\mathbb{U}$

On note par $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

À RETENIR

Stabilité de $\mathbb{U}$

Soient $z, z' \in \mathbb{U}$. Alors $z \times z' \in \mathbb{U}$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

En fait, l'ensemble $\mathbb{U}$ permet de décrire tous les points du cercle trigonométrique.
Passons maintenant à l'étude de certains sous-ensembles de $\mathbb{U}$.

À RETENIR

Racines n-ièmes de l'unité

Soit z un nombre complexe. On dit que z est une **racine n-ième de l'unité** si $z^n = 1$.

De plus, en notant par $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, on a
$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2i\pi\times 0}{n}}, e^{\frac{2i\pi\times 1}{n}}, e^{\frac{2i\pi\times 2}{n}}, \dots, e^{\frac{2i\pi\times(n-1)}{n}}\right\}$.

DÉMONSTRATION

Racines n-ièmes de l'unité

Soit $z \in \mathbb{U}_n$. On a $z^n = 1$, donc $|z^n| = |z|^n = 1$. Ainsi, on a $|z| = 1$. En écrivant z sous forme exponentielle, il existe $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Ainsi, $z^n = 1 \iff e^{in\theta} = 1 = e^{i0}$. Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont le même module et le même argument. On doit donc avoir $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 0 + 2k\pi$ i.e. $\theta = \frac{2k\pi}{n}$.

Et comme par le théorème fondamental de l'algèbre, l'équation $z^n - 1 = 0$ admet au plus n solutions, on a donc trouvé toutes les solutions.

À LIRE

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ décrit exactement le polynôme régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique ayant pour sommet 1.

Par exemple, $\mathbb{U}_3$ est l'ensemble des sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique (dont un sommet est 1).